İNTEGRAL

NOT İntegralin çeşitleri vardır.
1) Belirsiz İntegral
2) Belirli İntegral
3) Genelleştirilmiş İntegral

$\int_a^b f(x)\,dx$ 'in Riemann integrali olması için 2 koşul vardır.

1) $f(x)$ $[a,b]$'de sürekli olmalı
2) $[a,b]$ sonlu olmalıdır.

BELİRSİZ İNTEGRAL

TANIM $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $F:[a,b]\to\mathbb{R}$, Türevlenebilirler $\forall x\in[a,b]$ için $F'(x)=f(x)$ ise F'e f'in belirsiz integrali denir. $c\in\mathbb{R}$ olmak üzere $\int f(x)\,dx = F(x)+c$ olarak tanımlanır.

Burada $f(x)$'e integrant, c'ye integrasyon sabiti denir.

Örnek $\int 2x\,dx = ?$ $\quad = x^2+c$

Örnek $\int \cos x\,dx = ?$ $\quad = \sin x + c$

Özellik 1: $\forall \alpha\in\mathbb{R}$ için $\int \alpha . f(x)\,dx = \alpha . \int f(x)\,dx$

Özellik 2: Sonlu sayıda fonk. toplamından oluşan bir ifadenin belirsiz integrali bu fonk. ayrı ayrı integrallerinin toplamına eşittir.

$$\int (f(x)+h(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int h(x)\,dx$$

NOT 1 ve 2 özelliklerine integral operatörünün lineerlik özelliği deni

Not: 1 ve 2 özelliklerine integral operatörünün lineerlik özelliği denir.

Teorem

1) $\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)$

2) $d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx$

3) $\int d f(x) = \int f'(x)\,dx = f(x) + C$

Not

$$\int f(x) . h(x)\,dx \neq \int f(x)\,dx \,.\, \int h(x)\,dx$$

$$\int \frac{f(x)}{h(x)}\,dx \neq \int f(x)\,dx \Big/ \int h(x)\,dx$$

Örnek: $\frac{d}{du}\left(\underbrace{\int \frac{x^2+1}{\arcsin x}\,dx}_{\text{U'ya göre sbt}}\right)$

U'ya göre sbt $\Rightarrow$ $=0$

Örnek $\int \frac{d f(x)}{f'(x)} = ?$ $\longrightarrow \int \frac{\cancel{f'(x)}}{\cancel{f'(x)}}\,dx$ $\quad \int 1\,dx$

$= x + C$

Not: Belirsiz integral hesabında integral hesaplandıktan sonra mutlaka integrasyon sabiti olan "C" eklemelidir.

Temel İntegral Alma Kuralları

1) $\int a\,dx \rightarrow a.x + C$

2) $n+1$

2) $\int x^n dx \rightarrow \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ $(n \neq -1)$

3) $\int \frac{dx}{x} \rightarrow \ln|x| + c$

4) $\int a^x dx \rightarrow \frac{a^x}{\ln a} + c$

5) $\int e^x dx \rightarrow e^x + c$

6) $\int \cos x \, dx \rightarrow \sin x + c$

7) $\int \sin x \, dx \rightarrow -\cos x + c$

8) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx \rightarrow \tan x + c$

9) $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx \rightarrow -\cot x + c$

10) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \rightarrow \arcsin x + c = -\arccos x + c$

11) $\int \frac{dx}{1+x^2} \rightarrow \arctan x + c = -\operatorname{arccot} x + c$

12) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \rightarrow \ln(x^2 + (x^2 \pm a^2) + c \Rightarrow a \rightarrow$ sbt sayı

13) $\int \sinh x \, dx \rightarrow \cosh x + c$

14) $\int \cosh x \, dx \rightarrow \sinh x + c$

15) $\int \frac{dx}{\cosh^2 x} \rightarrow \tanh x + c$

16) $\int \frac{dx}{\sinh^2 x} \rightarrow -\coth x + c$

17) $\int \frac{dx}{\ldots} \rightarrow \operatorname{arcsinh} x + c$

OYF

(14) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} \rightarrow \operatorname{arcsinh} x + c$

13) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} \rightarrow \operatorname{arccosh} x + c$

Örnek: $\int 9x^2+4x-3\,dx = ? \quad = 3x^3+2x^2-3x+c$

Örnek: $\int 3.\sin x + 5.\sqrt{x^3} + 2/x\,dx$

$-3\cos x + 2\sqrt{x^5} + 2\ln|x| + c$

Örnek: $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}\right)dx = 2\sqrt{x} - \frac{1}{x} + c$

Örnek: $\int \left(\frac{3}{\cos^2 x} - 2e^x + 4/(1+x^2)\right) dx = ?$

$3.\tan x - 2e^x + 4\arctan x + c$

Örnek: $\int (x^3+3^x)\,dx = ? \quad = \frac{x^4}{4} + \frac{3^x}{\ln 3} + c$

Örnek: $\int \left(\frac{x^3+2}{\sqrt{x}}\right)dx \Rightarrow \int \frac{x^3}{\sqrt{x}}dx + \int \frac{2}{\sqrt{x}}dx$

$\frac{2x^{7/2}}{7} + 4\sqrt{x} + c = \frac{2}{7}\sqrt{x^7} + 4\sqrt{x} + c$

Örnek: $\int \tan^2 x\,dx \rightarrow \int (1+\tan^2 x) - 1\,dx$

$(\tan x)' = (1+\tan^2 x)$ $\quad = \tan x - x + c$

Ödev: $\int \cot^2 x\,dx = ?$

NOT Yukarıdakiler dışında bir çok integrali hesaplamak için integral alma kuralları ve temel özellikleri yeterli değildir

Aşağıdaki integral alma yöntemleri daha karışık integralleri hesaplamak için kullanılacaktır.

İNTEGRAL ALMA YÖNTEMLERİ

1) Değişken Değiştirme Yöntemi

Bu yöntemin amacı daha önce verilen 18 kurala uygun kolay bir integral elde etmektir.

$\Rightarrow \int f(h(x)).h'(x)\,dx \qquad h(x)=u \qquad h'(x)\,dx=du$

$\int f(u)\,du$ → Hesaplandıktan sonra u'lar x'e dönüştürülür

Örnek $\int (x^2+1)^3.2x\,dx \qquad x^2+1=u \qquad 2x\,dx=du$

$\int u^3.du \rightarrow \frac{u^4}{4} \Rightarrow \frac{(x^2+1)^4}{4}+C$

Örnek $\int \sqrt[5]{x^3-x+2}\,.(3x^2-1)\,dx$

$x^3-x+2=u$

$3x^2-1\,dx=du \qquad \Rightarrow \int \sqrt[5]{u}\,.du \Rightarrow \frac{5}{6}.u^{6/5}=\frac{5}{6}.(x^3-x+2)^{6/5}+C$

Örnek $\int \sin^3x.\cos x\,dx=? \qquad \int u^3.du$

$\sin x=u \qquad du=\cos x\,du \qquad \frac{u^4}{4}+C \Rightarrow \frac{\sin^4x}{4}+C$

Örnek $\int (x+1)^{99}dx$

$x+1=u$

$dx=du \qquad \frac{(x+1)^{100}}{100}+C$

NOT $(a, b, c \in R)$

$ax + b \Rightarrow$ Lineer

$ax^2 + bx + c \Rightarrow$ Quadratik $\Delta < 0 \Rightarrow$ çarpanlara ayrılmaz

$x + 1 \rightarrow$ Lineer

$x^2-1 \rightarrow (x-1)\cdot(x+1) \rightarrow$ Lineer $\times$ Lineer $\quad \Delta>0$

$x^2+1 \rightarrow$ Quadratik $\quad \Delta<0$

Örnek $\quad \displaystyle\int \frac{x^2+x+2}{(x^2+2x+3)^2}\,dx \qquad \int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx \Rightarrow$ der $P(x)=2$, der $Q(x)=4$

$\Rightarrow$ basit kesirlere ayırma doğrudan kullanılabilir.

$Q(x) = (x^2+2x+3)^2 \rightarrow \Delta_{Q(x)} < 0$ Quadratik

olmak üzere verilen fonk. basit kesirler cinsinden yazalım.

$$\frac{x^2+x+2}{(x^2+2x+3)^2} \rightarrow \frac{Ax+B}{\underset{(x^2+2x+3)}{x^2+2x+3}} + \frac{Cx+D}{\underset{(1)}{(x^2+2x+3)^2}}$$

ifadesinde polinom eşitliğinden A, B, C ve D sbt. bulunacak.

$\rightarrow x^2+x+2 = (Ax+B)\cdot(x^2+2x+3) + Cx+D$

Bu bir özdeşliktir ve bu özdeşlik her x için doğrudur.

$$x^2+x+2 = Ax^3+2Ax^2+3Ax+Bx^2+2Bx+3B+Cx+D$$

$$\Rightarrow Ax^3+x^2(2A+B)+x(3A+2B+C)+(3B+D)$$

$A=0 \quad B=1 \quad C=-1 \quad D=-1$

$$\int \frac{x^2+x+2}{(x^2+2x+3)^2}\,dx \rightarrow \int \frac{1}{x^2+2x+3} + \frac{-x-1}{(x^2+2x+3)^2}\,dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{\underbrace{x^2+2x+3}} - \int \frac{x+1}{(x^2+2x+3)^2}\,dx$$

$\downarrow \Delta<0$ $\qquad\qquad \hookrightarrow u = x^2+2x+3,\ du = 2x+2\,dx$

$(x+1)^2+2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 2(x+1)dx$

$$(x+1)^2+(\sqrt{2})^2 \qquad \frac{du/2}{u^2} = \int \frac{du}{2u^2}$$

$$= \int \frac{dx}{(x+1)^2+(\sqrt{2})^2} - \int \frac{du}{2u^2} = \int \frac{dt}{(\sqrt{2})^2+t^2} - \frac{1}{2}\int u^{-2}\,du$$

$$= \frac{1}{\ldots}\ \text{arc}\ldots\left(\frac{t}{\ldots}\right) - \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{-1}}{\ldots} + c$$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}\ ) \quad \frac{1}{2} \quad \frac{\ }{-1} + C$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2} \cdot (x^2+2x+3)^{-1} + C$$

NOT: $\int \frac{du}{k^2+u^2} = \frac{1}{k} \arctan\left(\frac{u}{k}\right) + C$

B) der $P(x) \geq Q(x)$

Bu durumda basit kesirlere ayırma doğrudan kullanılmaz polinom bölmesi ile payın derecesi paydadan küçük hale getirilir

Örnek $\int \frac{x-2}{x+5}\,dx$ hesaplayınız der $P(x)$ = der $Q(x)$ olduğundan polinom bölmesi yapılmalıdır.

$$\begin{array}{r|l} P(x) & Q(x) \\ \underline{-\quad\quad} & B(x) \\ K(x) & \end{array}$$

$$P(x) = B(x) \cdot Q(x) + K(x)$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = B(x) + \frac{K(x)}{Q(x)}$$

der $K(x)$ < der $Q(x)$

$$\begin{array}{r|l} x-2 & x+5 \\ \underline{-x-5} & 1 \\ -7 & \end{array}$$

$x-2 = (x+5)-7 \qquad \frac{x-2}{x+5} = 1 - \frac{7}{x+5}$

$$= \int 1 - \frac{7}{x+5} = \int (dx) - 7\int \frac{dx}{x+5} = x - 7 \cdot \ln|x+5| + c$$

Örnek $\int \frac{x^3-2}{x^2-x-2}\,dx = ?$ der $P(x)$ 3 > der $Q(x)$ 2

$$\begin{array}{r|l} x^3-2 & x^2-x-2 \\ \underline{-\ x^3+x^2+2x} & x+1 \\ x^2+2x-2 & \\ \underline{-x^2+x+2} & \\ 3x & \end{array}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = (x+1) + \frac{3x}{x^2-x-2}$$

$$= \int x+1\,dx + \underbrace{\int \frac{3x}{(x-2)(x+1)}}$$

$$3x = A(x+1) + B(x-2) \Longleftarrow \hookrightarrow \frac{A}{\underset{(x+1)}{x-2}} + \frac{B}{\underset{(x-2)}{x+1}}$$

$x = -1 \Rightarrow B = 1$

$x = 2 \Rightarrow A = 2$

$$= \frac{x^2}{2} + x + \int \frac{2}{x-2}dx + \int \frac{1}{x+1}$$

$$= \frac{x^2}{2} + x + 2\ln|x-2| + \ln|x+1|$$

4) $\int \sqrt{ax^2+x+c}$ ifadesini bulunduran integraller.

Bu ifadeyi bulunduran integralleri ifadeleri madde madde açıklayacağız.

A) $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ hesabı

Bu tip integraller $u = u(x)$ olmak üzere aşağıdakilere dönüştürülerek çözülür.

1) $\int \frac{du}{\sqrt{k^2-u^2}} = \arcsin\left(\frac{u}{k}\right) + c$

2) $\int \frac{du}{\sqrt{k^2+u^2}} = \ln\left(u + \sqrt{u^2+k^2}\right) + c$

3) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2-k^2}} = \ln\left(u + \sqrt{u^2-k^2}\right) + c$

Örnek $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+5x+3}} = ?$

$-(x^2-5x-3) \Rightarrow -\left[\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{37}{4}\right]$

$$= \frac{37}{4} - \left(x-\frac{5}{2}\right)^2 \rightarrow \sqrt{k^2-u^2}$$

$$=\sqrt{\frac{\sqrt{37}^2}{2^2}-\left(x-\frac{5}{2}\right)^2} \Rightarrow u=x-5/2 \,,\; du=dx$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{\frac{\sqrt{37}^2}{2^2}-u^2}} = \arcsin\left(\frac{u}{\frac{\sqrt{37}}{2}}\right)+C = \arcsin\left(\frac{2x-5}{\sqrt{37}}\right)+C$$

Not: ax^2+bx+c

$$a.\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

Örnek $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-12x+4}} \rightarrow 4(x^2-3x+1)$

$$(x-3/2)^2-5/4$$

$$u=x-3/2 \,,\; du=dx$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u^2-\frac{\sqrt{5}^2}{2^2}}}$$

$$=1/2\ \ln\left(u+\sqrt{u^2-k^2}\right)+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(x-3/2+\sqrt{(x-3/2)^2-5/4}\right)+C$$

B) $\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ 'in hesabı

Pay köklü ifadenin içinin türevine benzetilir.

Örnek $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$

$$x^2+2x+2=u$$

$$2x+2\,dx=du$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{2x+\cancel{6}^{\,2+4}}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$$

$$\Rightarrow \left[\int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx + \int \frac{4}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx\right] \cdot \frac{1}{2}$$

$$\left[\int \frac{du}{\sqrt{u}} + \int \frac{4}{(x+1)^2+1}\,dx\right] \cdot 1/2$$

$\hookrightarrow x+1=t \quad dx=dt$

$$\frac{1}{2}\left[\int u^{-1}du + 4\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}\right]$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left[2\sqrt{u} + 4\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)\right]$$

$$= 1/2\left[2.\sqrt{x^2+2x+2} + 4\ln\left(x+1+\sqrt{(x+1)^2+1}\right)\right] + C$$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{(mx+n)^p\sqrt{ax^2+bx+c}}$ Hesabı

Bu integrali hesaplamak için $mx+n \to \frac{1}{u}$ değişken değiştirmesini yaptık.

Örnek $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$ hesaplayınız

$x+1 = \frac{1}{u} \quad dx = \frac{-1}{u^2}du \qquad u = 1/x+1$

$$= \int \frac{-1/u^2\,du}{\frac{1}{u} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{u}-1\right)^2+1}} \Rightarrow \int \frac{du}{\sqrt{2u^2-2u+1}}$$

$\hookrightarrow \sqrt{2}\,(u^2 - u + 1/2)$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{du}{\sqrt{(u - 1/2)^2 + 1/4}}$$

$\nearrow$ n sayısı polinomun derecesidir

d) $\displaystyle\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx \qquad n \geq 2$ çözümü

$P_n(x)$: n'inci dereceden bir polinom
$Q_{n-1}(x)$: n-1'inci dereceden bir polinom
λ = sabit sayı olmak üzere;

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

$$\Rightarrow Q_{n-1}(x) = \sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

Yazılır

Son eşitliğin her iki tarafının türevi alınıp $Q_{n-1}(x)$ pol. sbtler ve "λ" sabiti bulunur.

Örnek $\displaystyle\int \frac{x^2+4x}{\sqrt{x^2+2x-2}}\,dx = ?$ (I)

$$= (Ax+B)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

$$\frac{x^2+4x}{\sqrt{x^2+2x-2}} = A\cdot\sqrt{x^2+2x-2} + \frac{(Ax+B)\cdot\overset{(x+1)\cdot\cancel{2}}{\cancel{(2x+2)}}}{\cancel{2}\cdot\sqrt{x^2+2x-2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+2x-2}}$$

Payda eşitleyelim $\Rightarrow \dfrac{A\cdot\sqrt{x^2+2x-2}\cdot\sqrt{x^2+2x-2}}{\sqrt{x^2+2x-2}} = \dfrac{A\cdot(x^2+2x-2)}{\sqrt{x^2+2x-2}}$

Paydaları sadeleştirelim:

$$\Rightarrow \cancel{x^2}+\cancel{4x} = A\cdot(x^2+2x-2) + (Ax+B)\cdot(x+1) + \lambda$$

$$= Ax^2+2Ax-2A + Ax^2+Ax+Bx+B+\lambda$$

$2A=1$ $\qquad \cancel{\frac{x^2}{2}} + x - 1 + \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x}{2} + Bx + B$

$A = 1/2$ $\qquad \cancel{\frac{3x}{2}} + \cancel{Bx} - 1 + B + \lambda \Rightarrow \frac{3x}{2} + Bx = 4x$

$B = 5/2$ $\qquad -1 + 5/2 + \lambda = 0$

$\lambda = -3/2$

$$\int \frac{x^2+4x}{\sqrt{x^2+2x-2}} \text{ (I)} = \left(\frac{1}{x} + \frac{5}{2}\right)\cdot\sqrt{x^2+2x-2} + \frac{-3}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x-2}} \text{ (II)}$$

II'yi hesaplayalım $\quad x^2+2x-2 \Rightarrow (x+1)^2-3$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2-\sqrt{3}^2}} \Rightarrow \begin{matrix} x+1=u \\ dx=du \end{matrix} \Rightarrow \int \frac{du}{\sqrt{u^2-\sqrt{3}^2}} = \ln\left(u+\sqrt{u^2-\sqrt{3}^2}\right)+C$$

$$= \ln\left(x+1+\sqrt{(x+1)^2-3}\right)+C$$

$$\int \frac{x^2+4x}{\sqrt{x^2+2x-2}}dx = \left(\frac{1}{x}+\frac{5}{2}\right).\sqrt{x^2+2x-2}+\frac{-3}{2}.\ln\left(x+1+\sqrt{(x+1)^2-3}\right)+C$$

5) TRİGONOMETRİK İNTEGRALLER

Bu tip integralleri hesaplamak için aşağıdaki trigonometrik özdeşlikler kullanılır.

A) $\cos^2x+\sin^2x=1$

- $\sin^2x=1-\cos^2x$ • $\cos^2x=1-\sin^2x$

B) $\sin 2x = 2.\sin x.\cos x$

- $\sin x.\cos x = \sin 2x/2$

C) $\cos 2x = 1-2.\sin^2x$

$\Rightarrow \sin^2x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ $\Rightarrow \cos^2x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$

D) $\sin x.\cos y = \frac{1}{2}.[\sin(x-y)+\sin(x+y)]$

$\Rightarrow \sin x.\sin y = 1/2.[\cos(x-y)-\cos(x+y)]$

$\Rightarrow \cos x.\cos y = 1/2.[\cos(x-y)+\cos(x+y)]$

1) $\int \sin^n x\,dx$ ve $\int \cos^n x\,dx$ hesabı

a) "n" tek ise;

$\int \sin^n x\,dx = \int \sin^{n-1}x.\sin x\,dx$ olarak yazılır.

$\int \cos^n x\,dx = \int \cos^{n-1}x.\cos x\,dx$ (1)

$\sin^2 x = 1-\cos^2 x$ Bu özdeşlikler yardımı ile
$\cos^2 x = 1-\sin^2 x$ İntegral çözülür (I)

Örnek $\int \cos^3 x \, dx = ?$

$\int [1-\sin^2 x] \cdot \cos x \, dx$

$\sin x = u \Rightarrow \cos x \, dx = du \Rightarrow \int (1-u^2) du$

$= u - \frac{u^3}{3} + C \Rightarrow \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$

Örnek $\int \sin^5 x \, dx = ? \Rightarrow \int (\sin^2 x)^2 \cdot \sin x \, dx$

$= \int (1-\cos^2 x)^2 \cdot \sin x \, dx$ $\cos x = u$

$\sin x \, dx = -du \longleftarrow -\sin x \, dx = du$

$\int (1-u^2)^2 \cdot -du \Rightarrow -\int (1-2u^2+u^4) du$

$= \left[u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{u^5}{5}\right] \cdot -1 \Rightarrow -u + 2u^3/3 - u^5/5 + C$

$= -\cos x + \frac{2\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + C$

b) "n" çift olsun

$\int \sin^n x = \int (\sin^2 x)^{n/2}$ olarak yazılır
$\int \cos^n x = \int (\cos^2 x)^{n/2}$ (I)

$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ bu şekilde yazılıp

$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ İntegral alınır (II)

Not

$\int \cos(ax+b) \, dx = \frac{1}{a} \cdot \sin(ax+b) + C$

$$\int \sin(ax+b)\,dx = \frac{-1}{a}\cdot\cos(ax+b) + C$$

Örnek $\int \cos^2 x \, dx = ?$

$$= \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) dx \Rightarrow \int \frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2}\, dx$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C = \frac{2x + \sin 2x}{4} + C$$

Örnek $\int \sin^4 x \, dx = ? = \int (\sin^2)^2 dx$

$$= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1-\cos 2x)^2\, dx$$

$$\frac{1}{4}\int 1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x \, dx \qquad \frac{1+\cos 4x}{2}$$

$$\frac{1}{4}\int 1 - 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\, dx$$

$$\frac{1}{4}\left[x - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin 2x + \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\sin 4x\right] + C$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{3x}{2} - \sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x\right] + C$$

2) $\sin^m x \cdot \cos^n x \, dx$ 'in hesabı

a) (Tek-Çift) Tek kuvvetin derecesi 1 azaltılır.

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$
$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

Uygun olan kullanılır daha sonra değişken değiştirme yapılır

Örnek $\int \cos^5 \quad \sin^2 \quad dx$

Örnek $\int \cos^5 x \cdot \sin^2 x \, dx$

Burada kuvvetlerden biri tek diğeri çifttir. Kuvveti tek olan fonksiyona odaklanacağız.

$\Rightarrow \int \cos^4 x \cdot \cos x \cdot \sin^2 x \, dx$

$\Rightarrow \int (\cos^2 x)^2 \cdot \cos x \cdot \sin^2 x \, dx$

$\Rightarrow \int (1-\sin^2 x)^2 \cdot \sin^2 x \cdot \cos x \, dx$ $\quad u = \sin x$

$du = \cos x \, dx$

$\Rightarrow \int (1-u^2)^2 \cdot u^2 \cdot du$

$\Rightarrow \int (1-2u^2+u^4) \cdot u^2 \, du \Rightarrow \int u^2 - 2u^4 + u^6 \, du$

$\Rightarrow \frac{u^3}{3} - \frac{2u^5}{5} + \frac{u^7}{7} + C = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{2\sin^5 x}{5} + \frac{\sin^7 x}{7} + C$

b) m ve n'nin ikisi de tek olsun.

Bu tip bir soruda kuvveti küçük olan fonksiyona odaklanır. Benzer yöntemle soru çözülür.

Örnek $\int \sin^5 x \cdot \cos^3 x \, dx$

$\Rightarrow \int \sin^5 x \cdot \cos^2 x \cdot \cos x \, dx \Rightarrow \int \sin^5 x \cdot (1-\sin^2 x) \cdot \cos x \, dx$

$\sin x = u \quad du = \cos x \, dx$

$\Rightarrow \int u^5 \cdot (1-u^2) \cdot du \Rightarrow \int u^5 - u^7 \, du$

$\Rightarrow \frac{u^6}{6} - \frac{u^8}{8} + C = \frac{\sin^6 x}{6} - \frac{\sin^8 x}{8} + C$

c) m ve n'nin kuvvetleri çift olsun.

Bu tip sorularda yarım açı formülleri kullanılır.

$\rightarrow \sin x \cdot \cos x = \dfrac{\sin 2x}{2}$

$\rightarrow \sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$

$\rightarrow \cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$

Örnek (11) $\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \, dx = ?$

$\Rightarrow \int \dfrac{1-\cos 2x}{2} \cdot \dfrac{1+\cos 2x}{2} \, dx \Rightarrow \frac{1}{4} \int 1 - \cos^2 2x \, dx$

$\Rightarrow \frac{1}{4}\left(\int dx - \int \cos^2 2x \, dx\right) \Rightarrow \frac{1}{4}\left(\int dx - \int \dfrac{1+\cos 4x}{2}\right)$

$\Rightarrow 1/4 \int dx - 1/8 \int dx - 1/8 \int \cos 4x \, dx$

$\Rightarrow \dfrac{x}{4} - \dfrac{x}{8} - \dfrac{1}{8} \cdot \dfrac{1}{4} \cdot \sin 4x + C$

Not
$\int \cos(ax+b) \, dx = \frac{1}{a} \cdot \sin(ax+b) + C$
$\int \sin(ax+b) \, dx = -1/a \cdot \cos(ax+b) + C$

Örnek (1) $\int \sin^4 x \cdot \cos^2 x \, dx = ?$

Bu soruyu çözerken bazı düzenlemelerden sonra yarım açı formulu kullanılacaktır.

$\Rightarrow \int \sin^2 x \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 x \, dx \Rightarrow \int \sin^2 x \cdot \dfrac{\sin^2 2x}{4} \, dx$

$\Rightarrow \frac{1}{4} \cdot \int \sin^2 x \cdot \sin^2 2x \, dx \Rightarrow \frac{1}{4} \int \dfrac{1-\cos 2x}{2} \cdot \sin^2 2x \, dx$

$\Rightarrow \frac{1}{8} \int (1-\cos 2x) \cdot \sin^2 2x \, dx$

$\Rightarrow 1/8 \cdot \int \sin^2 2x \, dx - \frac{1}{8} \int \cos 2x \cdot \sin^2 2x \, dx$

$\sin 2x = u \qquad \frac{du}{2} = \cos 2x\, dx$

$\Rightarrow \frac{1}{8}\int \frac{1-\cos 4x}{2}\,dx - \frac{1}{8}\cdot\int u^2\,\frac{du}{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{16}\int dx - \frac{1}{16}\int \cos 4x\,dx - \frac{1}{16}\int u^2\,du$

$\Rightarrow \frac{x}{16} - \frac{1}{64}\cdot \sin 4x - \frac{1}{48}\cdot(\sin 2x)^3$

3) $\left.\begin{array}{l}\int \sin(mx)\cdot\sin(nx)\,dx \\ \int \cos(mx)\cdot\cos(nx)\,dx \\ \int \sin(mx)\cdot\cos(nx)\,dx\end{array}\right\}$ Tipinde İntegraller

Bu tip integralleri hesaplamak için çarpımı toplama/farka dönüştüren trigonometrik ifadeleri kullanacağız.

$\Rightarrow \sin x\cdot\cos y = \frac{1}{2}\cdot[(\sin(x-y) + \sin(x+y)]$

$\Rightarrow \sin x\cdot\sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$

$\Rightarrow \cos x\cdot\cos y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)]$

Örnek $\int \sin 3x\cdot\cos 4x\,dx = ?$

$\Rightarrow \int \frac{1}{2}\cdot[\sin(-x) + \sin(7x)] \Rightarrow \frac{1}{2}\int -\sin x + \sin 7x\,dx$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(\cos x - \frac{1}{7}\cdot\cos 7x\right) + C \Rightarrow \frac{\cos x}{2} - \frac{\cos 7x}{14} + C$

4) $\sin x$ ve $\cos x$ fonksiyonlarını rasyonel olarak bulunduran integraller

Bu tip integralleri çözmek için:

$\tan x/2 = u$ kullanılır. Bu kullanılırsa :

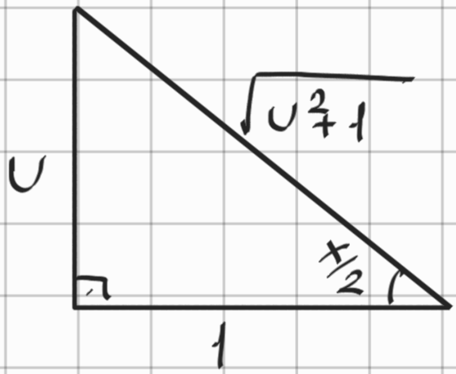
$\tan x/2 = u$ konulur, bu konulursa :

$$\sin \frac{x}{2} = 2u/1+u^2$$
$$\cos \frac{x}{2} = 1-u^2/1+u^2$$
$$dx = 2du/1+u^2$$ elde edilir.

Not $\tan\frac{x}{2} = u \rightarrow \arctan u = x/2$

iki tarafın türevini alalım

$$\Rightarrow \frac{1}{1+u^2}du = \frac{1}{2}dx \rightarrow \frac{2du}{1+u^2} = dx$$



$$\Rightarrow \sin x = 2 . \sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2}$$
$$\hookrightarrow 2 . u/\sqrt{u^2+1} . 1/\sqrt{u^2+1}$$
$$= 2u/u^2+1$$

$$\Rightarrow \cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$$
$$\hookrightarrow 1/u^2+1 - u^2/u^2+1$$
$$= (1-u^2)/(u^2+1)$$

Örnek $\int \frac{dx}{\cos x} = ?$ $\quad u = \tan\frac{x}{2}$

$$\Rightarrow \int \frac{\frac{2du}{\cancel{1+u^2}}}{\frac{1-u^2}{\cancel{1+u^2}}} \Rightarrow \int \frac{2du}{1-u^2} \Rightarrow 2\int \frac{1}{1-u^2} . du$$

$\longrightarrow$ der$P = 0$, der$Q = 2$ olup basit kesire ayırırız

$$\frac{2}{1-u^2} \rightarrow \frac{A}{1-u} + \frac{B}{1+u} \qquad 2 = A(1+u) + B(1-u)$$
$$u = 1 \Rightarrow A = 1$$
$$u = -1 \Rightarrow B = 1$$

$$\Rightarrow \int \frac{2du}{1-u^2} = \int \left[\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u}\right] dx$$

$$= -\ln(1-u) + \ln(1+u) + c$$

$$= -\ln\left|1-\tan\frac{x}{2}\right| + \ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right| + C$$

Örnek $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin x-\cos x} = ?$ $\qquad \tan\frac{x}{2} = u$

$$\Rightarrow \int \frac{\frac{2du}{1+u^2}}{1+\frac{2u}{u^2+1}-\frac{1-u^2}{u^2+1}} \Rightarrow \int \frac{\frac{2du}{\cancel{1+u^2}}}{\frac{u^2+1+2u+u^2-1}{\cancel{u^2+1}}}$$

$$\Rightarrow \int \frac{\cancel{2}du}{\cancel{2}u^2+\cancel{2}u} \Rightarrow \int \frac{du}{u^2+u}$$

$$\frac{1}{u^2+u} \rightarrow \frac{A}{u} + \frac{B}{u+1} \qquad A(u+1) + B(u) = 1$$

$u=0$, $A=1$

$u=-1$, $B=-1$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{u} + \frac{-1}{u+1}\, du \Rightarrow \ln|u| - \ln|u+1| + C$$

$$= \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| - \ln\left|\tan\frac{x}{2}+1\right| + C$$

Örnek $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^3 x} = ?$

$u = \tan\frac{x}{2}$ kullanılır.

$dx = 2du/u^2+1 \qquad \sin x = \frac{2u}{u^2+1}$

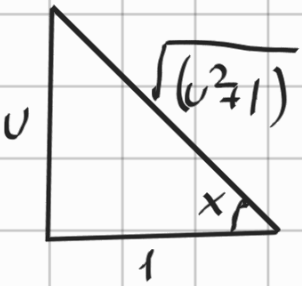
$$\rightarrow \int \frac{\frac{2du}{u^2+1}}{\left(\frac{2u}{u^2+1}\right)^3} \rightarrow \int \frac{2du \cdot (u^2+1)^2}{8u^3} \rightarrow \int \frac{\cancel{2}du \cdot (u^4+2u^2+1)}{4\cancel{8}u^3}$$

$$\rightarrow \frac{1}{4}\int \frac{u^4+2u^2+1}{u^3}\, du \rightarrow \frac{1}{4}\int \frac{u^{\cancel{4}}}{\cancel{u^3}} + \frac{2u^{\cancel{2}}}{u^{\cancel{3}}} + \frac{1}{u^3}\, du$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\int u + \frac{2}{u} + \frac{1}{u^3}\, du \Rightarrow \frac{1}{4}\left(\frac{u^2}{2} + 2\ln|u| + -\frac{u^{-2}}{2}\right) + C$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{\tan^2\frac{x}{2}}{2} + 2\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| - \frac{\tan^{-2}\left(\frac{x}{2}\right)}{2}\right] + C$$

Not: $\sin x$ ve $\cos x$ fonk. kuvveti çift ise işlem kolaylığı açısından $\tan x = u$ 'da yapılabilir.



$$\cos x = 1/\sqrt{u^2+1}$$
$$\sin x = u/\sqrt{u^2+1}$$

$\tan x = u \rightarrow$ türev aldık

$\arctan u = x \rightarrow dx = du/(1+u^2)$

Örnek: $\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\,dx = ?$ $\quad \tan x = u \quad\quad \tan x = u$

$$\int \frac{\sin^2 x + 1 - 1}{1+\sin^2 x}\,dx = \int \cancel{\frac{\sin^2 x + 1}{1+\sin^2 x}}\,dx - \int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$$

$$\Rightarrow \int dx - \boxed{\int \frac{\frac{du}{1+u^2}}{1+u^2/(u^2+1)}} \rightarrow \int \frac{du}{u^2+1+u^2} \rightarrow \int \frac{du}{2u^2+1}$$

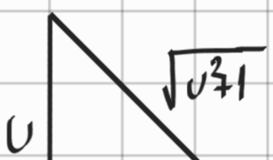
$$\Rightarrow \int dx - \frac{1}{2}\int \frac{du}{\frac{1}{2}+u^2} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} + u^2$$

$$\Rightarrow x - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1/\sqrt{2}} \cdot \arctan\left(\frac{u}{1/\sqrt{2}}\right)\right] + C$$

$$= x - \frac{1}{2}\left[\sqrt{2} \cdot \arctan(\sqrt{2}\tan x)\right] + C$$

Örnek $\int \frac{dx}{\cos x \sin x}$ integralini $\tan x = u$ ile yapınız.

$$dx = du/(1+u^2)$$



$$\int \frac{du/\cancel{1+u^2}}{\ldots} \rightarrow \int \frac{du}{\ldots}$$

$\Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{u^2+1}} \cdot \frac{u}{\sqrt{u^2+1}}$ $\quad \Rightarrow \int \; u$

$= \ln|\tan x| + c$

5) Trigonometrik değişken değiştirmeler

A) İçerisinde $\sqrt{a^2-u^2}$ 'den başka köklü ifade olmayan integraller:

Bu tip integralleri hesaplamak için $u = a.\sin t$ yapılır
$du = a.\cos t.dt$

Örnek $\int \sqrt{3-x^2}\, dx = ?$

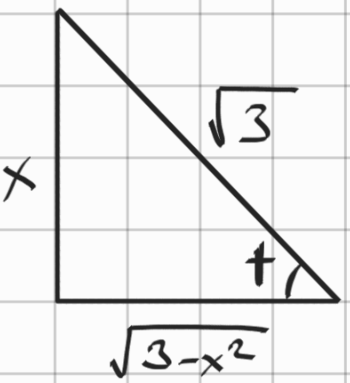
$x = \sqrt{3}.\sin t \qquad dx = \sqrt{3}.\cos t.dt \rightarrow t = \arcsin \frac{x}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \int \sqrt{3-3\sin^2 t} \, . \, \sqrt{3}.\cos t.dt \Rightarrow \int \sqrt{3}.\sqrt{1-\sin^2 t}.\sqrt{3}.\cos t.dt$

$\Rightarrow 3\int \sqrt{\cos^2 t}\,.\cos t.dt \rightarrow 3.\int \cos^2 t \; dt$

$\Rightarrow \frac{3}{2}\int dt + \frac{3}{2}\int \cos 2t \; dt \Rightarrow \frac{3}{2}\left(t + \frac{1}{2}.\sin 2t\right) + c$

$\Rightarrow$ Sonuç x'e bağlı olmalıdır.



$\rightarrow \sin t = \frac{x}{\sqrt{3}} \qquad \rightarrow \cos t = \frac{\sqrt{3-x^2}}{\sqrt{3}}$

$\rightarrow \sin 2t = 2.\cos t.\sin t$

$= 2.\, x/\sqrt{3}\, .\, \sqrt{3-x^2}/\sqrt{3}$

Sonuç $= \frac{3}{2}\left(\arcsin \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}.2.\frac{x}{\sqrt{3}}.\frac{\sqrt{3-x^2}}{\sqrt{3}}\right) + c$

B) İçerisinde $\sqrt{a^2+u^2}$ 'den başka köklü ifade olmayan integraller:

Bu tip integralleri çözmek için $u = a.\tan t$ yapılır.

$du = a/\cos^2 t \; dt$

Örnek $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}} = ?$ $\qquad x = 3.\tan t$

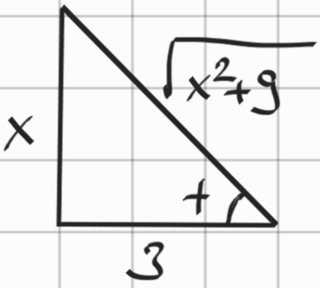
$dx = 3/\cos^2 t \; dt$

$\Rightarrow \int \frac{\cancel{3}/\cos^2 t \; dt}{3\cancel{9}\tan^2 t\sqrt{9\tan^2 t+9}} \Rightarrow \frac{1}{9}\int \frac{dt}{\cancel{\cos^2 t}\cdot\frac{\sin^2 t}{\cancel{\cos^2 t}}\cdot\underbrace{\cancel{\sqrt{\tan^2 t+1}}}_{1/\cancel{\cos t}}}$

$\Rightarrow \frac{1}{9}\int \frac{\cos t}{\sin^2 t}dt \Rightarrow \sin t = u$

$du = \cos t \, dt$

$\Rightarrow \frac{1}{9}\int \frac{du}{u^2} \Rightarrow \frac{-1}{9}\cdot u^{-1}+c \longrightarrow \frac{-1}{9}(\sin t)^{-1}+c$



$\Rightarrow \frac{-1}{9}\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\right)^{-1}+C$

C) İçerisinde $\sqrt{u^2-a^2}$ 'den başka köklü ifade yok

Bu tip integralleri çözmek için $u = a/\cos t$

$du = -a.(\cos t)^{-2}.(-\sin t)$

$du = a.\sin t/\cos^2 t$

Örnek $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx$ $\qquad x = 2/\cos t$

$dx = (2.\sin t/\cos^2 t)dt$

$\Rightarrow \int \sqrt{4/\cos^2 t - 4} \quad 2 \cdot \sin t \quad dt$

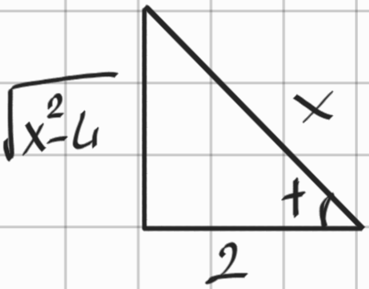
$$\int \frac{\ldots}{2/\cos t} \cdot \frac{\ldots}{\cos^2 t}\, dt \qquad \sqrt{1-\cos^2 t} = \frac{\sin t}{\cos t}$$

$$\Rightarrow 2\int \frac{\sqrt{1/\cos^2 t - 1}\cdot \cancel{\cos t}\cdot \sin t}{\cos^{\cancel{2}} t}\, dt$$

$$\Rightarrow 2\int \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\, dt \rightarrow 2\int \tan^2 t + 1 - 1\, dt$$

$$\cos t = \frac{2}{x}$$

$$\Rightarrow 2.(\tan t - t) + C$$



$$\Rightarrow \tan t = \frac{\sqrt{x^2-4}}{2}$$

$$t = \arccos\frac{2}{x}$$

$$\text{Sonuç} = 2\left(\frac{\sqrt{x^2-4}}{2} - \arccos\frac{2}{x}\right) + C$$

6) İçerisinde, $\sqrt[m]{ax+b}$ ve $\sqrt[n]{ax+b}$ Bulunduran İntegraller

ekok $(m,n) = k$ olsun ; $ax+b = u^k$ yapılarak bu tip integraller çözülür.

Örnek 11: $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt[3]{x+1}}\, dx = ?$

$x+1 = u^6$

$dx = 6u^5\, du$

$u = (x+1)^{1/6}$

$$\Rightarrow \int \frac{u^3+1}{\cancel{u^2}}\cdot 6.u^{\cancel{5}3}\, du$$

$$\Rightarrow 6\int u^6 + u^3\, du \Rightarrow 6\left(\frac{u^7}{7} + \frac{u^4}{4}\right) + C$$

$$= 6\left[\frac{(x+1)^{7/6}}{7} + \frac{(x+1)^{4/6}}{4}\right] + C$$

L.C.M. → List Common Multiple

Örnek 11 $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{2x-1}}\,dx = ?$ $\qquad 2x-1 = u^2 \rightarrow x^3 = \left(\frac{u^2+1}{2}\right)^3$

$$\cancel{2}dx = \cancel{2}u\,du$$

$$= \int \frac{\left(\frac{u^2+1}{2}\right)^3}{\cancel{u}}\,\cancel{u}\cdot du \Rightarrow \frac{1}{8}\int (u^2+1)^3\,du$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8}\int u^6+3u^4+3u^2+1\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8}\left[\frac{u^7}{7}+\frac{3}{5}u^5+u^3+u\right]+C$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{(2x-1)^{7/2}}{7}+\frac{3.(2x-1)^{5/2}}{5}+(2x-1)^{3/2}+(2x-1)^{1/2}\right]+C$$

Örnek 11 $\displaystyle\int x^5.\sqrt{x^2+3}\,dx = ?$

$$x^2+3=u^2, \quad \cancel{2}x\,dx = \cancel{2}u\,du, \quad x=\sqrt{u^2-3}$$

$$\Rightarrow \int (u^2-3)^2 u.u\,du \Rightarrow \int (u^6-6u^4+9u^2)\,du$$

$$\Rightarrow \frac{u^7}{7}-\frac{6u^5}{5}+\frac{9u^3}{3}+c = \frac{(x^2+3)^{7/2}}{7}-\frac{6.(x^2+3)^{5/2}}{5}+3(x^2+3)^{3/2}+C$$

BELİRLİ İNTEGRAL (Riemann)

Tanım:

$f:[a,b]\rightarrow R$ integrellenebilir fonksiyon olsun.
$\forall x\in[a,b]$ için $F'(x)=f(x)$ olacak şekilde $F:[a,b]\rightarrow R$ varsa

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$$ olacak şekildedir.

Bu formule Newton-Liebtniz (?) formulu denir.

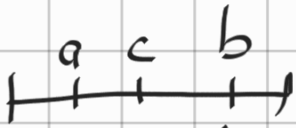
Teorem: $f:[a,b]\rightarrow R$ integrallenebilir

Teorem: $f:[a,b]\to \mathbb{R}$ integrallenebilir

① $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$

② $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

③ $a < c < b$



$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

④ $\displaystyle\int_a^b k.f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

⑤ $\displaystyle\frac{d}{dx}\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{\text{constant}}$ → because of that $= 0$

⑥ If $f(x) \geq 0$ for all $x \in [a,b]$,
then $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

⑦ If $f(x) < h(x)$ for all $x \in [a,b]$,
then $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b h(x)\,dx$

⑧ Let $f:[-a,a]\to \mathbb{R}$ be an continuous function

If f is odd, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

If f is even, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$

odd function $\rightarrow$ $f(-x) = -f(x)$
even function $\rightarrow$ $f(-x) = f(x)$

Not:

$\int_a^b f(x)\,dx$ integralinin bir riemann integrali olabilmesi için;

1- $[a,b]$ sonlu olması lazım
2- $f(x)$'in $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli olmalı

Aksi halde bu integral genelleştirilmiş integraldir.

Örnek $\int_3^5 \frac{dx}{x-7/2} \Rightarrow$ 1- Sonludur
2- Sürekli değildir
genelleştirilmiş integral

$7/2$

$\int_7^9 \frac{dx}{x-7/2} \Rightarrow$ 1- Sonludur
2- Aralıkta süreklidir
riemann integrali

Not: $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ 'da f pozitifse mutlak olarak sonuç 0'dır.

Örnek $\int_0^1 \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx = ?$

$= \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = (x - \arctan x)\Big|_0^1$

$= (1 - \arctan 1) - (0 + \arctan 0)$

$= \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) - 0 = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$

$(1-\pi/4) - 0 = (1-\pi/4)$

Örnek $\int_0^{\ln 3} e^x \cdot \sqrt{e^x - 1}\, dx = ?$ $\qquad e^x - 1 = u$

$e^x dx = du$

$\int_0^2 \sqrt{u}\, du \qquad \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_0^2 = \frac{2}{3}\sqrt{8}$

Örnek $\int_{-2}^{5} |x^2 - 2x - 3|\, dx$ $\qquad$ Kritik noktalardan işaret tablosu yapılacak.

$x^2 - 2x - 3 \Rightarrow (x-3)(x+1)$

$$\begin{array}{ccccccc} -2 & & -1 & & 3 & & 5 \\ | & + & \phi & - & \phi & + & | \end{array}$$

$$\int_3^5 x^2 - 2x - 3\, dx + \int_{-2}^{-1} x^2 - 2x - 3\, dx + \int_{-1}^{3} -(x^2 - 2x - 3)\, dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x \Big|_3^5 \right) + \left(\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x \Big|_{-2}^{-1} \right) - \left(\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x \Big|_{-1}^{3} \right)$$

$= 71/3$ Hesaplamaya üşendim.

Örnek $\underbrace{\frac{d}{dx} \int_3^7 (x^2 - 4)(x+8)^{99}\, dx}_{\text{sabit sayı}} = ?$ $\qquad = 0$

Örnek $\int_1^4 x\, dy = 12$ ise $x = ?$

$xy \Big|_1^4 \qquad 3x = 12 \qquad x = 4$

Örnek $\int_0^5 \frac{d(3x-5)}{\sqrt{x+4}}\, dx = ? \rightarrow \int_0^5 \frac{3\, dx}{\sqrt{x+4}} \Rightarrow \int_0^5 3 \frac{dx}{\sqrt{x+4}}$

$x + 4 = u \quad dx = du \Rightarrow \int^9 \frac{3.du}{\ldots} \qquad 3 . 2 u^{1/2} \Big|^9_{\ldots}$

$$= 18 - 12 = 6 \, //$$

Örnek f tek bir fonk. ve $\int_{-2}^{4} f(x)\,dx = 12$ olsun

$$\int_{4}^{2} f(x)\,dx = ?$$

$$\boxed{\int_{-2}^{2} f(x)\,dx} + \int_{2}^{4} f(x)\,dx = 12$$

↳ $-\int_{2}^{4} f(x)\,dx = -12 \, //$

→ Tek fonk.'tan ötürü sonucu 0'dır.

Örnek

$$f(x) = \begin{cases} 4x & x < -2 \text{ ise} \\ x-6 & -2 \le x \le 0 \text{ ise} \\ -2x-6 & 0 < x \text{ ise} \end{cases} \qquad \int_{-4}^{2} f(x)\,dx = ?$$

-4x | x-6 | -2x-6

-4 | -2 | 0 | 2

$$= \int_{-4}^{-2} f(x)\,dx + \int_{-2}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{2} f(x)\,dx$$

$$= -54$$

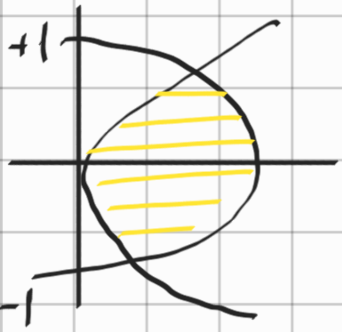
11 Örnek $x=y^2$, $x=2-y^2$ grafikleri tarafından sınırlanan bölgenin alanı =?

$x = 2 - y^2$ $\qquad x=0 \Rightarrow y^2 = 2 \qquad y = \mp\sqrt{2}$

$a = -1 < 0$ $\qquad y=0 \Rightarrow x = 2 \quad (2,0)$

T.N. (m,n) $\qquad n = \dfrac{-\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2} = 0$

$(2,0)$ $\qquad m = x(0) = 2$

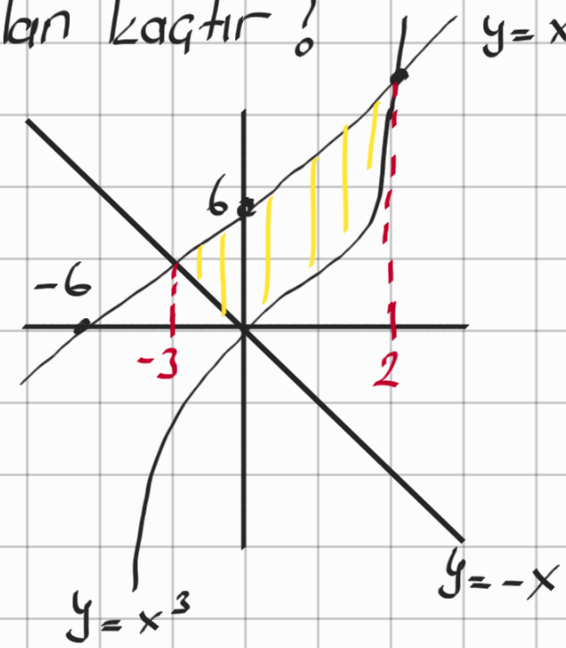


$$\left.\begin{aligned} x &= y^2 \\ x &= 2-y^2 \end{aligned}\right\} 2-y^2 = y^2 \qquad y = \mp 1$$

$$\text{Alan} = \int_{-1}^{+1} (2-y^2-y^2)\,dy = \left(2y - \tfrac{2}{3}y^3\right)\Big|_{-1}^{1}$$

$$= 8/3 \text{ br}^2$$

Örnek $y=-x$, $y=x+6$, $y=x^3$ eğrileri tarafından sınırlanan alan kaçtır?



$x+6 = x^3 \qquad x^3 - x - 6 = 0 \qquad x = 2$

$x+6 = -x$

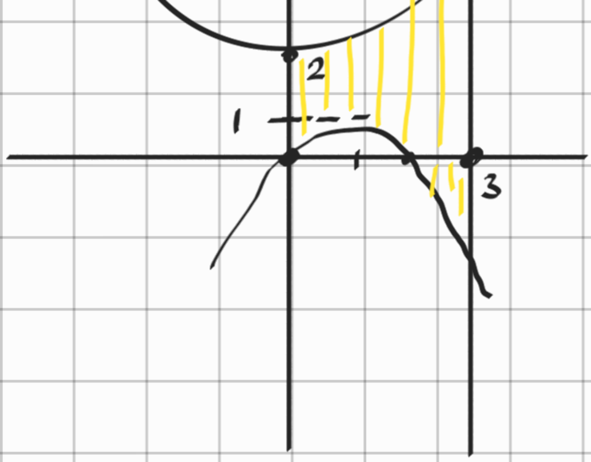
$2x+6 = 0 \qquad x = -3$

$$\int_0^2 x+6\,dx - \int_0^2 x^3\,dx$$
$$+$$
$$\int_{-3}^{0} x+6\,dx - \int_{-3}^{0} -x\,dx \qquad \frac{-x^2}{2}$$

$14 - 4 + 9 \rightarrow \text{Alan} = 19 \text{ br}^2$

Örnek $y = x^2+2$, $y = 2x - x^2$ Parabolleri ile y ekseni ve $x=3$ doğrusu tarafından sınırlanan bölgenin alanını hesaplayın.

$y = x(2-x)$

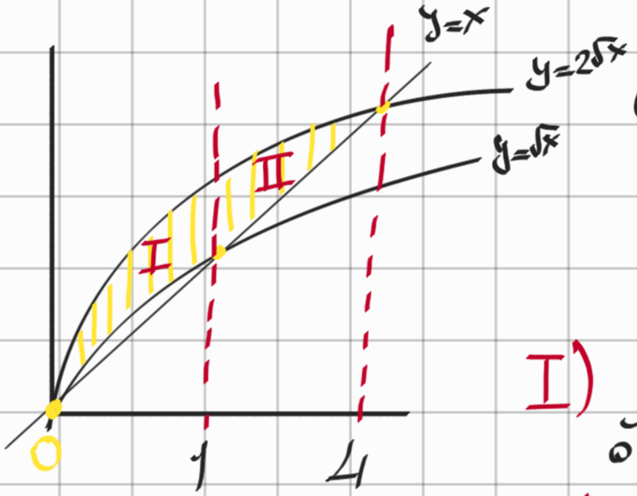


$$\int_0^3 x^2+2 \;-\; \int_0^2 2x-x^2 \;+\; \int_2^3 2x-x^2$$

$$\frac{x^3}{3}+2x\Big|_0^3 \;-\; x^2-\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 \;+\; x^2-\frac{x^3}{3}\Big|_2^3 = 15br^2$$

$x=y^2 \qquad x=y^2/4$

Örnek $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$, $y=x$ tarafından sınırlanan bölgenin alanı = ?



$a \rightarrow \begin{matrix} y=x \\ y=\sqrt{x} \end{matrix} \qquad x=1$

$b = \begin{matrix} y=x \\ y=2\sqrt{x} \end{matrix} \qquad x=2\sqrt{x} \qquad x^2=4x$

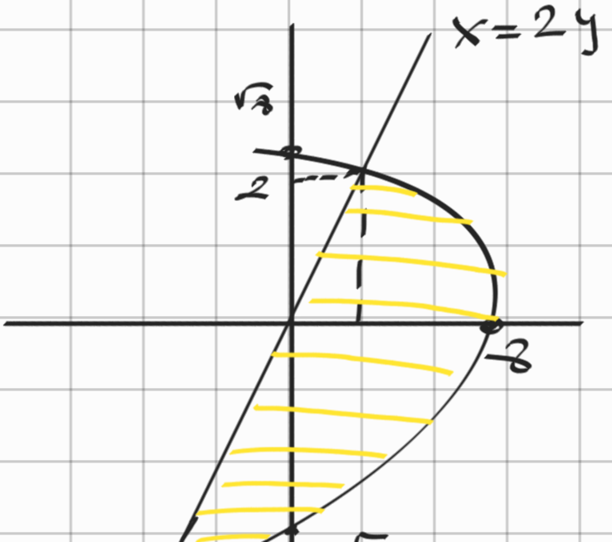
$x=0 \qquad x=4$

I) $\int_0^1 (2\sqrt{x}-\sqrt{x})\,dx \rightarrow \int_0^1 \sqrt{x}$

II) $\int_1^4 (2\sqrt{x}-x)\,dx$

$\text{Alan} = \text{I}+\text{II} = \frac{5}{2}$

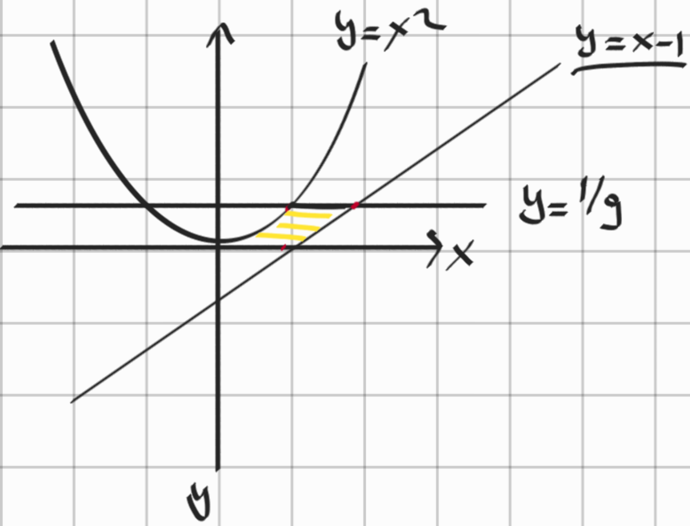
Örnek $x=2y$, $x=8-y^2$ arasında kalan bölge alanı?



$$\text{Alan} = \int_{-4}^{2} (8-y^2-2y)\,dy$$

$$8y-\frac{y^3}{3}-y^2\Big|_{-4}^{2} = 36br^2$$

Örnek (11) $y=x^2$, $y=x-1$, $y=1/9$ ve x ekseni arasında kalan bölgenin alanını hesaplayınız.



$x^2 = x-1 \rightarrow x^2 - x + 1 \quad \Delta < 0$
kesişmez

$$\text{Alan} = \int_0^{1/3} y+1-\sqrt{y}\, dy = 5/54 \text{ br}^2$$

3) Bir Eğrinin Uzunluğu

Bu tip örneklerde 2 çeşit eğri tipi karşımıza çıkar.

f fonksiyonu $[a,b]$ sürekli ve türevli olsun. f' aynı aralıkta süreklidir. $y=f(x)$'in $[a,b]$ aralığındaki uzunluğu;

$$L = \int_a^b \sqrt{[1+(f'(x))^2]}\, dx$$

Bu tür sorularda eğri çizmek zorunda değilsiniz.

Örnek (11) $y = \frac{4\sqrt{2}}{3} x^{3/2} - 1$ eğrisinin $0 \le x \le 1$'de uzunluğu = ?

$$y'(x) = \frac{2\cancel{4}\sqrt{2}}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}} x^{1/2} \rightarrow \int_0^1 \sqrt{1+(2\sqrt{2}x^{1/2})^2}\, dx \Rightarrow \int_0^1 \sqrt{1+8x}\, dx$$

$1+8x = u$

$dx = du/8$

$$\Rightarrow \int \sqrt{u}\, du/8$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} \cdot u^{3/2} = \frac{1}{12} \cdot (1+8x)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{13}{6} \text{ br}$$

Örnek $y=\frac{1}{3}(x^2+2)^{3/2}$ 'nin $0\le x\le 3$ 'de uzunluğu =?

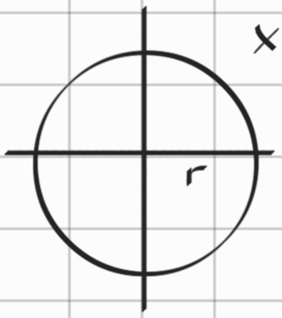
$y'(x)=\frac{1}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}x\cdot(x^2+2)^{1/2}$ $\quad y'(x)=x\sqrt{x^2+2}$

$$L=\int_0^3\sqrt{1+x^2\cdot(x^2+2)}\,dx \to \int_0^3\cancel{\sqrt{x^4+2x^2+1}}\,dx$$

$$(x^2+1)^{\cancel{2}}$$

$$=\frac{x^3}{3}+x\Big|_0^3=12\,br$$

Örnek Yarıçapı r olan Çemberin uzunluğu =?



$x^2+y^2=r^2$

$y'(x)=\frac{-F_x}{F_y}$, $F(x,y)=x^2+y^2-r^2=0$

$=\frac{-2x}{2y}$

$y'(x)=\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}$ $\quad (y'(x))^2=\frac{x^2}{r^2-x^2}$

$$L=4\int_0^r\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx \to 4r\int_0^r\frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

b) $x=h(y)$ eğrisi

$h(y)$ fonk. $[c,d]$ aralığında sürekli ve sürekli türevlere sahipse; $x=h(y)$ eğrisinin $c\le y\le d$ aralığındaki uzunluğu

$$L=\int_c^d\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$$ şeklinde hesaplanır.

Örnek $24xy=y^4+48$ $\left(\frac{4}{3},2\right)$ ve $\left(\frac{11}{4},4\right)$ nok. uzunluk=?

$x=\frac{y^3}{24}+\frac{2}{y} \Rightarrow \frac{dx}{dy}=\frac{\cancel{3}y^2}{\cancel{24}_8}-\frac{2}{y^2}$

$\Rightarrow \left(\frac{dx}{dy}\right)^2=\frac{y^4}{64}-2\cdot\frac{\cancel{y^2}}{8}\cdot\frac{2}{\cancel{y^2}}+\frac{4}{y^4}=\frac{y^4}{64}-\frac{1}{2}+\frac{4}{y^4}$

$$L=\int \sqrt{\frac{y^4}{64}+\frac{1}{2}+\frac{4}{y^4}}\,dy \Rightarrow \int_2^4 \sqrt{\left(\frac{y^2}{8}+\frac{2}{y^2}\right)^{\cancel{2}}} \Rightarrow \int_2^4 \frac{y^2}{8}+\frac{2}{y^2}\,dy$$

$$=\frac{y^3}{24}-\frac{2}{y}\Big|_2^4 = 17/6 \text{ br}$$

Ödev $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ 'nin $0\leq x\leq 2$ için uzunluğu = ?

Ödev $y=e^x$ 'in $0\leq x\leq 2$ için uzunluk hesaplayınız.

HACİM HESABI

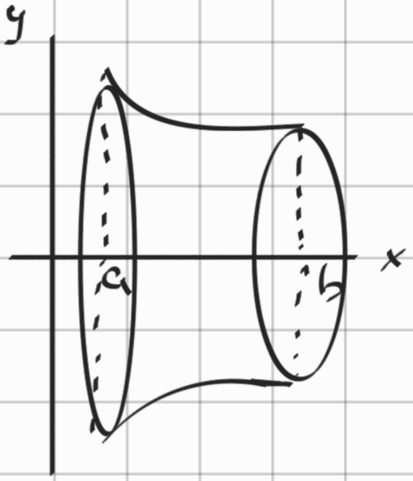
2 Boyutlu bir bölgenin yatay veya düşey bir doğru etrafında

döndürülmesi ile meydana gelen bir cismin hacmini hesaplayacağız.
Bu hacim hesabını yaparken kullanılacak 2 yöntem vardır.

- Disk Metodu — Silindirik Tabakalar Metodu

A) Disk Yöntemi

i) $f(x) \geq 0$ ve $[a,b]$'de sürekli, $y=f(x)$ eğrisi ve x-ekseni arasında kalan $a \leq x \leq b$ için kalan bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesi ile meydana gelen bölge hacmi;



$$V = \pi \int_a^b (f(x) - 0)^2 \, dx$$

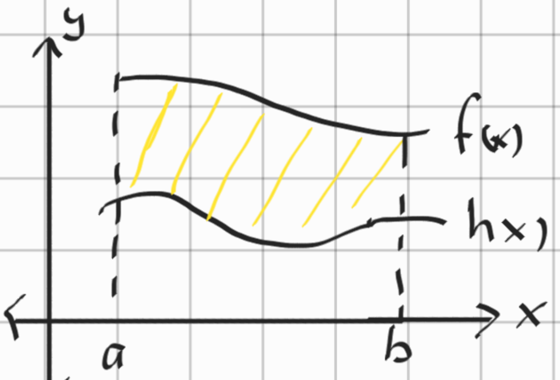
$$\downarrow$$

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) \, dx$$

NOT $y = f(x)$ eğrisi x-ekseni arasında kalan bölgeyi $a \leq x \leq b$ için $y = k$ ekseni etrafında döndürürsek hacim =

$$V = \pi \int_a^b (f(x) - k)^2 \, dx$$

ii) $y = f(x)$, $y = h(x)$ eğrileri arasında kalan bölgeyi x-ekseni etrafında döndürürsek oluşan cismin hacmi; (Hacim $f(x) \geq h(x)$) ↳ $y=0$



$$V = \pi \left[\int_a^b f^2(x) - h^2(x) \, dx \right.$$

Büyükten küçük çıkartılır.

iii) 2. maddede verilen bölgeyi $y=k$ 'da döndürürsek;

$$V=\pi \int_a^b (f(x)-k)^2-(h(x)-k)^2\,dx$$

Örnek I. bölgede $y=\sqrt{x}$ eğrisi altında kalan bölgenin $0\leq x\leq 4$ için hacmi $=?$

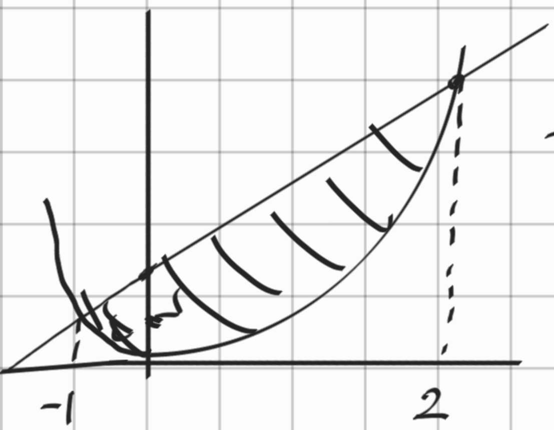
$$V=\pi\int_0^4 x \quad = 8\pi \text{ br}^3$$

Örnek $y=x^3$ bölge hacmi $(1\leq x\leq 2)$

$$\int_1^2 x^6\,dx\cdot\pi \qquad \left.\frac{x^7}{7}\right|_1^2\cdot\pi \quad = \frac{127}{7}\pi$$

Örnek $y=x^2$ ve $y=x+2$ tarafından sınırlanan bölgenin x-eks etrafında dönmesi

$x^2=x+2 \qquad x^2-x-2 \qquad \begin{matrix} x-2 \\ x+1 \end{matrix}$



$$\pi\cdot\int_{-1}^{2} (x+2)^2-x^4\,dx$$

$$x^2+4x+4-x^4$$

$$\left.\frac{x^3}{3}+2x^2+4x-\frac{x^5}{5}\right|_{-1}^{2} = \frac{72}{5}\pi$$

Örnek $y=\sqrt{r^2-x^2}$ yarı çemberinin x-eks'nde dönmesi ile meydana gelen kürenin hacmi

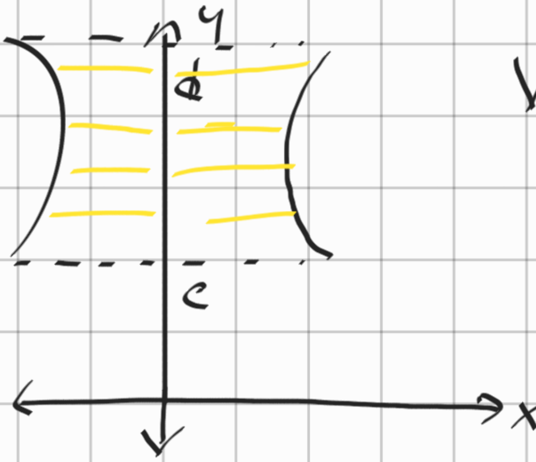
$$V = \pi \int_{-r}^{r} (f(x)-0)^2 \, dx \rightarrow \pi \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^2 dx$$

$$= r^2x - \frac{x^3}{3}\Big|_{-r}^{r} \cdot \pi \rightarrow \left[r^3 - \frac{r^3}{3} - \left(-r^3 + \frac{r^3}{3}\right)\right] \cdot \pi$$

$$= \pi \cdot \left(r^3 - \frac{r^3}{3} + r^3 - \frac{r^3}{3}\right) \Rightarrow \pi\left(2r^3 - \frac{2r^3}{3}\right) = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

iv) $h(y) \geq 0$ ve $h(y)$ $[c,d]$ sürekli

$x = h(y)$ ve y-eks arasında kalan bölge y-eks etrafında döndürülmesi ile meydana gelen döner cismin hacmi;



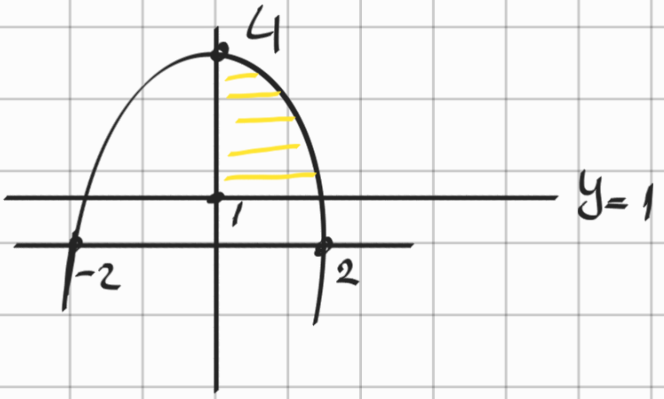
$$V = \pi \cdot \int_{c}^{d} (h(y) - k)^2 \, dy$$

$k \rightarrow x = k$ 'dan gelir y-eks etrafında ise $k = 0$.

v) $x = f(y)$, $x = h(y)$ arasında kalan hacim $(Af(x) \geq Ah(x))$
$a \leq y < b$

$$V = \pi \int_{a}^{b} (f(x) - k)^2 - (h(x) - k)^2 \, dy$$

Örnek 1: $y = 4 - x^2$ ile $y = 1$ doğrusu y-eks cismin hacmi $(0 \leq x \leq \sqrt{3})$ kaçtır? (I. Bölgede kalan kısmı)



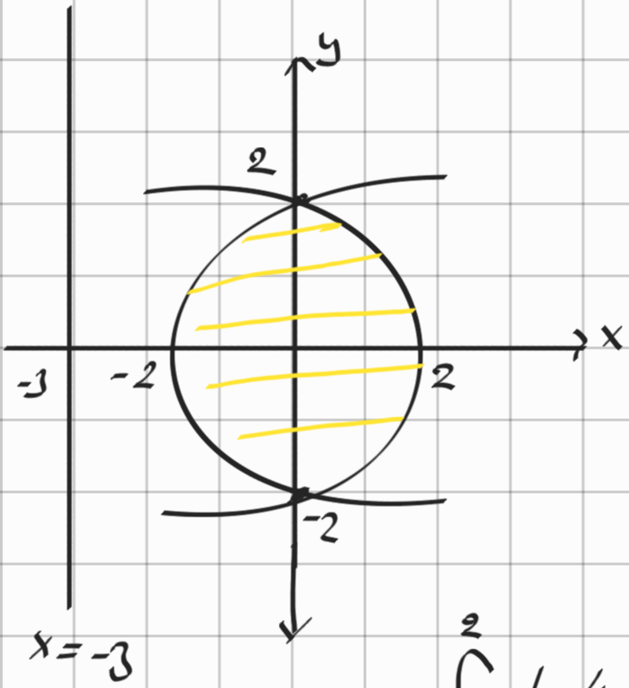
$$\sqrt{-y+4} = x$$

$$\int_{1}^{4} -y+4 \, dy \Rightarrow \frac{-y^2}{2} + 4y \Big|_{1}^{4}$$

$-6+16-\left(-\tfrac{1}{2}+4\right)$

$\pi.\left(8-4+1/2\right) \quad = \frac{9}{2}\pi\ br^3$

Örnek $2x = 4-y^2$ eğrilerinin $x=-3$ doğrusu etrafında
$2x = y^2-4$ dönmesi ile meydana gelen alan



$2x = 4-y^2 \qquad x=0,\ y=\pm 2$

$\qquad\qquad\qquad\quad y=0,\ x=2$

$T.N. = (2,0)$

$2x = y^2-4 \qquad x=0,\ y=\pm 2$

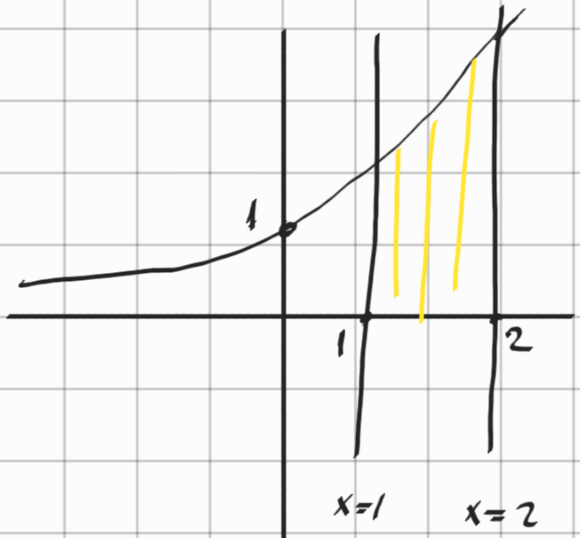
$\qquad\qquad\qquad\quad y=0 \quad x=-2$

$T.N. = (-2,0)$

$$\pi\int_{-2}^{2}\left(\frac{4-y^2}{2}-(-3)\right)^2-\left(\frac{y^2-4}{2}-(-3)\right)^2 dy$$

$$=\pi.\int_{-2}^{2}\left(2-\frac{y^2}{2}+3\right)^2-\left(\frac{y^2}{2}-2+3\right)^2 dy = 128\pi\ br^3$$

Örnek $y=e^x$, $x=1$, $x=2$ ve x-eks ile sınırlanan alanın x eks. etrafında dönünce oluşan hacim $=?$



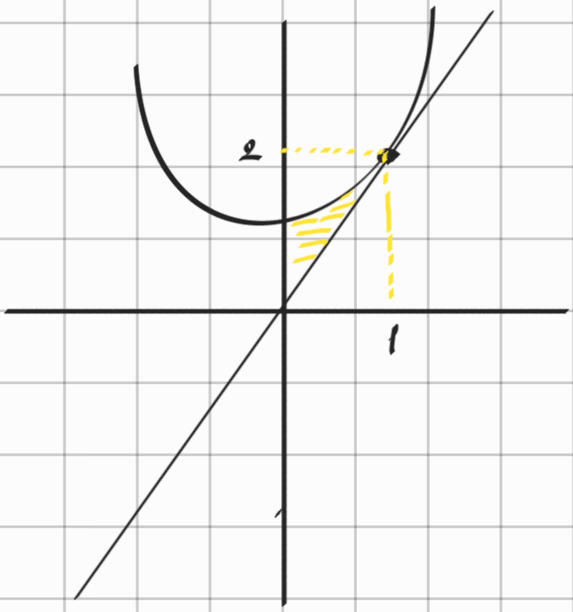
$$\pi.\int_{1}^{2}(e^x)^2dx = \pi.\ \frac{1}{2}\cdot e^{2x}\Big|_1^2$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\left(e^4-e^2\right)\ br^3$$

11) Örnek $y=x^2+1$, $y=2x$ ve y-eks. tarafından sınırlanan R bölgesinin;

a) x-eks

b) y-eks etrafında dönmesi ile meydana gelen dönen cisimlerin hacmi?



$2x = x^2+1 \quad 0 = x^2-2x+1$

$(x-1)^2$

a) $\int_0^1 (x^2+1)^2-(2x)^2\,dx \cdot \pi$

$x^4+2x^2+1-4x^2 \Rightarrow x^4-2x^2+1$

$\frac{x^5}{5}-\frac{2}{3}x^3+x\Big|_0^1 \Rightarrow \frac{1}{5_{/3}}-\frac{2}{3_{/5}}+1 = \frac{8\pi}{15}br^3$

b) $\sqrt{y-1}=x$

$y/2 = x$

$\int_1^2 (y/2)^2-(\sqrt{y-1})^2\,dy \Rightarrow \int_1^2 \frac{y^2}{4}-y+1 \rightarrow \frac{1}{4}\int_1^2 y^2-4y+4$

$\Rightarrow \int_0^1 \left(\frac{y}{2}\right)^2 dy$

KABUK YÖNTEMİ

Bir bölgenin $y=k$ veya $x=p$ eks. etrafında dönmesi ile meydana gelen döner cismin hacmi hem disk yöntemi ile hem de kabuk yöntemi ile elde edilebilir. Kabuk yönteminin bazı durumlarda disk metoduna göre avantajları vardır.

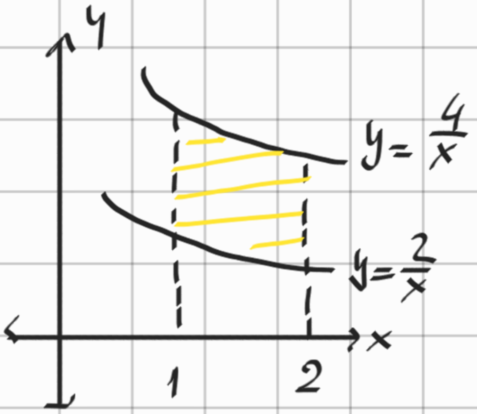
i) $y=f(x)$ ve $y=h(x)$ eğrileri tarafından sınırlanan bölgenin $a \leq x \leq b$ için; y-eks etrafında döndürülmesi ile meydana gelen cismin hacmi;

$V = 2\pi \int_a^b x\,(f(x)-h(x))\,dx$ Burada $\forall x$ için $f(x) \geq h(x)$

ii) $x=f(y)$ ve $x=h(y)$ eğrileri tarafından sınırlanan bölgenin $c \leq y \leq d$ için; x-eks etrafında döndürülmesi ile meydana gelen döner cismin hacmi;

$V = 2\pi \int_c^d y\,(f(y)-h(y))\,dy$ Burada $\forall y$ için $f(y) \geq h(y)$

Örnek $y=\frac{2}{x}$ ve $y=4/x$ $1 \leq x \leq 2$ için y-eks etrafında döndürülmesi ile meydana gelen cismin hacmini hesaplayınız.



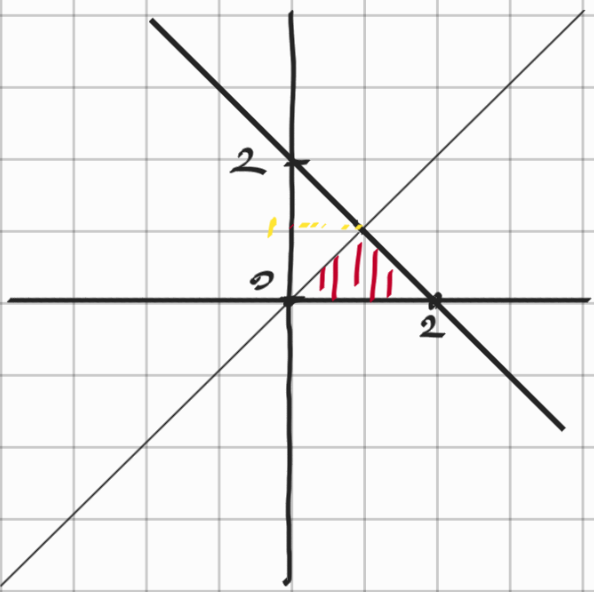
$$V = 2\pi \int_1^2 x\left(\frac{4}{x}-\frac{2}{x}\right)dx$$

$$\Rightarrow 2\pi \int_1^2 \cancel{x}\cdot\frac{2}{\cancel{x}}\,dx \Rightarrow 2\pi\cdot\left(2x\Big|_1^2\right)$$

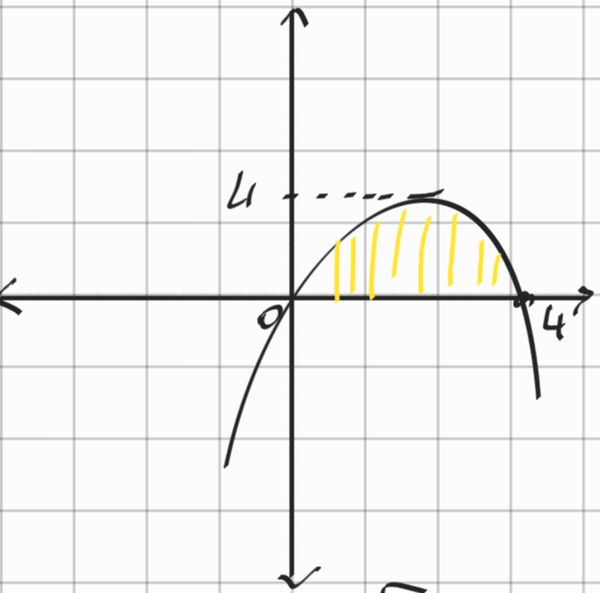
$$= 4\pi$$

Örnek $y=x$, $y=2-x$ ve $y=0$ doğruları tarafından x-eks etrafında dönen cismin hacmi

$$= 2\pi \int_0^1 y(2-y-y)\,dy = \frac{2}{3}\pi$$



Örnek $y = 4x - x^2$ ile x-eks arasında sınırlı R bölgesinin y-eks etrafında döndürülmesi ile meydana gelen hacim = ?



$$= 2\pi \int_0^4 x\,(4x - x^2)\,dx$$

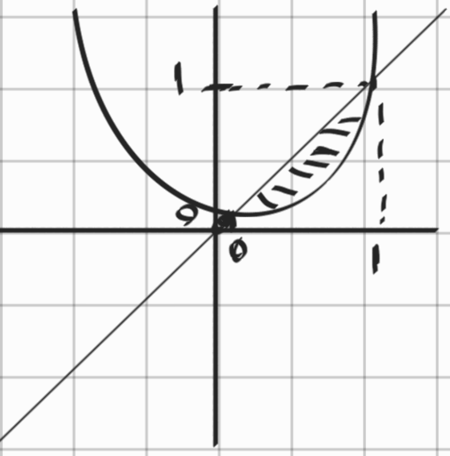
$$4x^2 - x^3$$

$$= 2\pi \left(\frac{4}{3}x^3 - \frac{x^4}{4} \Big|_0^4 \right)$$

$$2\pi \cdot \left(\frac{256}{3} - 64 \right) = \frac{128}{3}\pi$$

$\sqrt{y} = x$

Örnek $y = x$, $y = x^2$ tarafından sınırlanan bölgenin y-eks etrafında dönmesi ile meydana gelen döner cismin hacmini hesaplayınız



$x^2 = x \quad x(x-1) = 0 \quad x = 0 \quad x = 1$

$$2\pi \int_0^1 x\,(x - x^2)\,dx$$

$$x^2 - x^3 \longrightarrow 2\pi \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 \right)$$

$$2\pi \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{6} \ \text{br}^3$$

Döner Yüzeylerin Alan Hesabı

i) f fonk. $[a,b]$'de pozitif ve sürekli türevlenebilir olsun. $y = f(x)$ eğrisinin $a \leq x \leq b$ için Ox-eks. etrafında döndürülmesi ile meydana gelen döner yüzeyin alanı ;

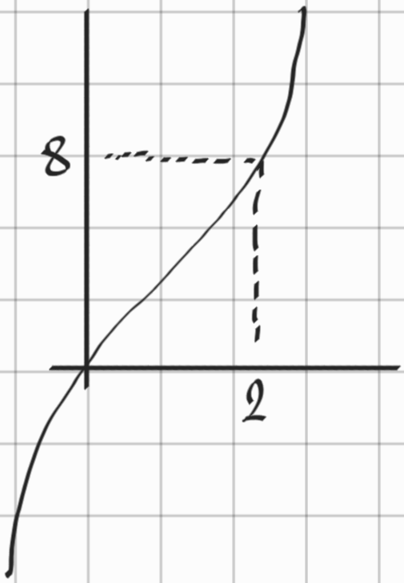
$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$

Not Yukarıdaki durum için döndürme eks. $y = L$ doğrusu ise

$$A = 2\pi \int^b \ldots$$

$A = 2\pi \cdot \int_a (f(x)-k) \cdot \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx$

11) Örnek $y = 2x^3$'ün $[0,2]$ aralığındaki parçanın x-eks dönmesi ile meydana gelen alanı hesaplayınız



$$2\pi \int_0^2 2x^3 \sqrt{1+36x^4}\, dx$$

$1+36x^4 = u \qquad du = 144x^3\, du$

$$\Rightarrow \frac{1}{36}\pi \int_1^{577} \sqrt{u}\, du \Rightarrow \frac{\pi}{54}\left(577^{3/2}-1\right) br^2$$

Örnek r yarıçaplı kürenin yüzey alanı kaçtır?

Çember denk $=$ $\underline{x^2+y^2=r^2}$ çemberinin üst yarısını x-eks etrafında döndürmemiz gerekir $\hookrightarrow y = \sqrt{r^2-x^2}$ $\quad F(x,y) = x^2+y^2-r^2$

$$y'(x) = \frac{-F_x}{F_y} = \frac{-2x}{2y} = \frac{-x}{y} = \frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}} \Rightarrow (y'(x))^2 = \frac{x^2}{r^2-x^2}$$

$$\text{Alan} = 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2} \cdot \sqrt{1-\frac{x^2}{r^2-x^2}}\, dx \Rightarrow 2\pi \int_{-r}^{r} r\, dx = 2\pi \cdot rx \Big|_{-r}^{r}$$

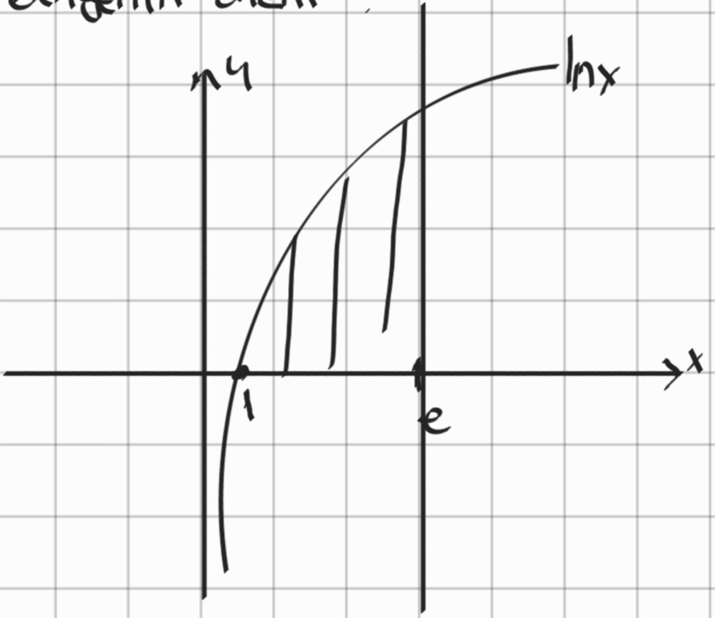
$$= 4\pi r^2$$

ii) h fonk $[c,d]$ aralığında pozitif ve bu aralıkta türevli olsun. $x = h(y)$ eğrisinin aralıktaki parçanın y-eks etrafında dönmesi ile yüzey alanı;

$$\text{Alan} = 2\pi \int_c^d h(y) \sqrt{1+(h'(y))^2}\, dy \quad \text{olur.}$$

Örnek $y = \ln x$ eğrisi, x-eks ve $x = e$ doğrusu arasında kalan bölgenin alanı?

bölgenin alanı



$A = \int_1 \ln x \, dx$

$u = \ln x \qquad dv = dx$

$du = \frac{1}{x} \ln x \qquad v = x$

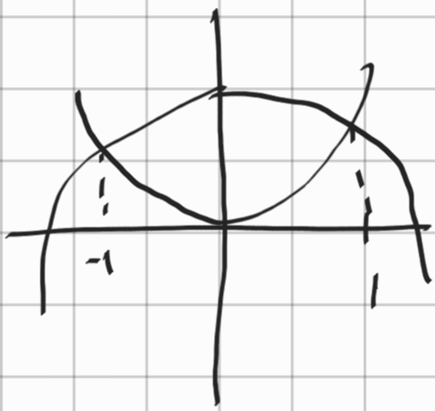
$= x . \ln x - \int \frac{1}{x} x \, dx$

$\Rightarrow (x \ln x - x) \Big|_1^e$

$\Rightarrow (e \ln e - e) - (1 \ln 1 - 1)$

$= 1 br^2$

Örnek $y = x^2$, $y = 2 - x^2$ arasında kalan bölgenin alanı



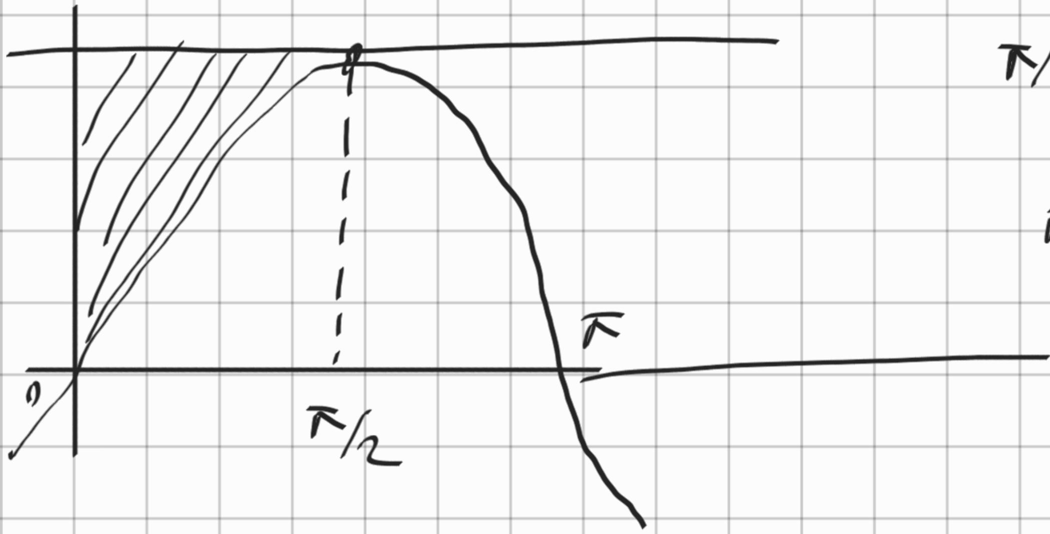
$x^2 = 2 - x^2 \qquad 2x^2 - 2 \qquad 2(x^2 - 1)$

$x = 1 \; -1$

$\int_{-1}^{+1} 2 - x^2 - x^2 \, dx$

$= \frac{8}{3} br^2$

Örnek $y = \sin x$, $y = 1$ ve $x = 0$ alanı hesaplayınız

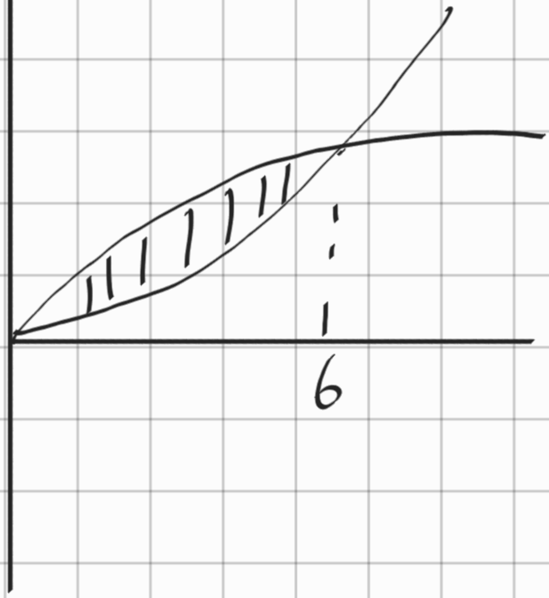


$\pi/2 - \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx$

$\pi/2 + \cos x \Big|_0^{\pi/2}$

$\pi/2 - 1 \; br^2$

Örnek $6y = x^2$, $6x = y^2$ eğrileri tarafından sınırlanan bölgenin alanını hesaplayınız



$$\frac{x^2}{6} = \sqrt{6x} \qquad \frac{x^2}{6} - \sqrt{6x}$$

$$x = 0 \quad x = 6$$

$$\int_0^6 \sqrt{6x} - \frac{x^2}{6}\, dx$$

$$\frac{1}{6}\int_0^6 6\sqrt{6x} - x^2\, dx$$

$$\int_0^6 \sqrt{6x}\, dx - \frac{1}{6}\int_0^6 x^2\, dx$$

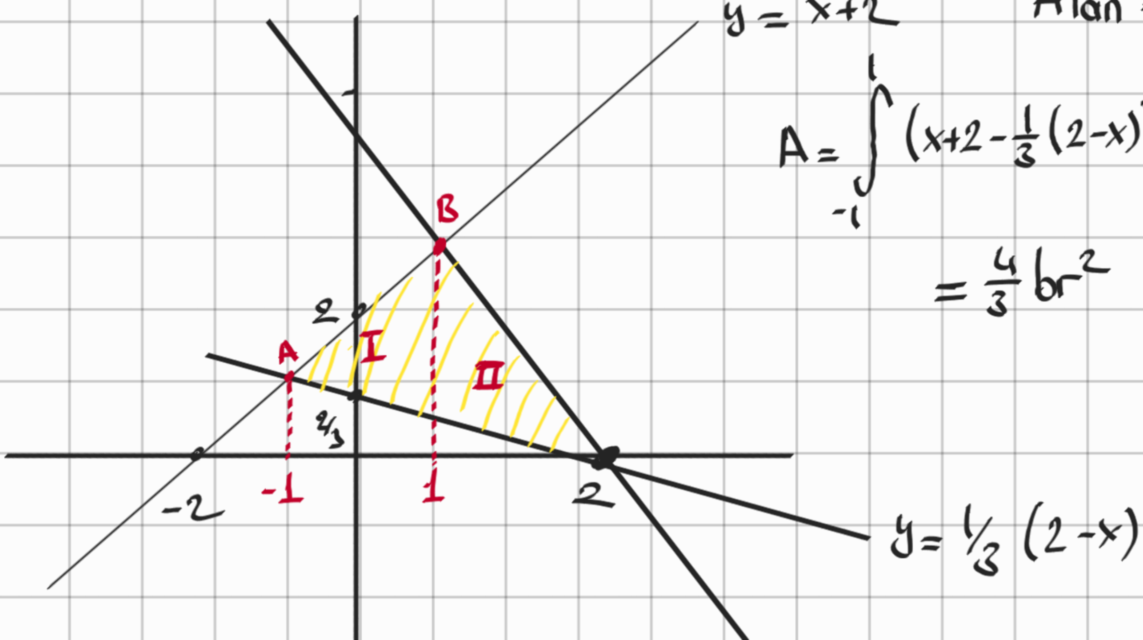
$$\frac{2}{3}\cdot\sqrt{6}\cdot x^{3/2} - \frac{1}{6}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^6$$

$$\frac{2\sqrt{6}}{3}\cdot\sqrt{6^3} - \frac{6^3}{18}$$

$$\frac{72}{3} - \frac{216}{18} \qquad \frac{36}{3}$$

$$\frac{36}{3} = 12$$

Örnek $y = x+2$, $y = -3x+6$, $y = \frac{1}{3}(2-x)$ doğruları arasında kalan bölgenin alanı = ?

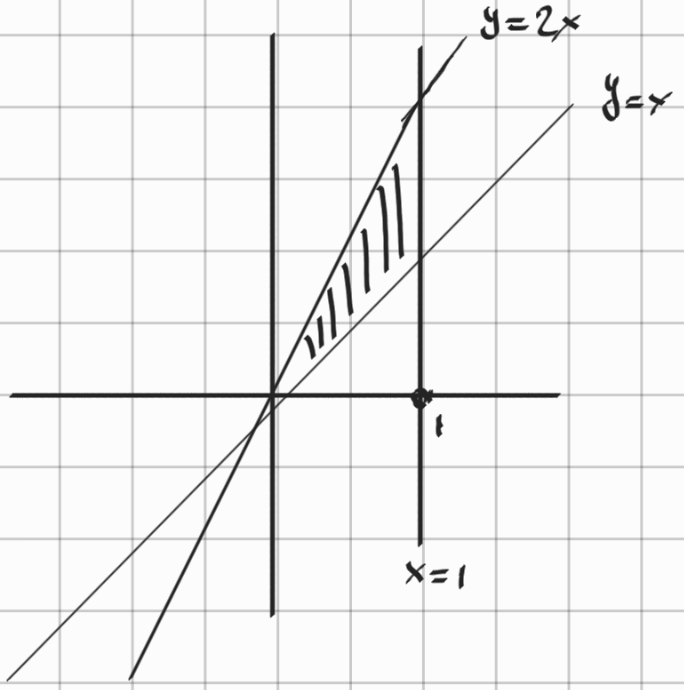


Alan = I + II

$$A = \int_{-1}^{1}\left(x+2-\frac{1}{3}(2-x)\right)dx + \int_{1}^{2}\left(-3x+6-\frac{1}{3}(2-x)\right)dx$$

$$= \frac{4}{3}\, br^2$$

11 **Örnek** $y = x$, $y = 2x$ ve $x = 1$ ile sınırlanan bölgenin x-eks etrafında döndürülmesi ile meydana gelen döner cismin hacmini hesaplayınız



$$\pi \int_0^1 (2x)^2 - (x)^2 \, dx$$

$$4x^2 - x^2$$

$$= \pi \,.\, x^3 \Big|_0^1 = \underline{\pi \ br^3}$$